

# SCフィルタの縦続構成における総容量の最少化手法

|     |   |
|-----|---|
| 著者  | 馬 志強, 中山 謙二, 山本 外史  |
| 雑誌名 | 電子情報通信学会論文誌   |
| 巻   | J73-A   |
| 号   | 4   |
| ページ | 759-768   |
| 発行年 | 1990-04-01  |
| URL | <a href="http://hdl.handle.net/2297/5636">http://hdl.handle.net/2297/5636</a> |

# SC フィルタの縦続構成における総容量の最小化手法

正員 馬 志強<sup>†</sup>      正員 中山 謙二<sup>†</sup>      正員 山本 外史<sup>†</sup>

## A Method to Minimize Total Capacitance in Cascade Realization of SC Filters

Zhiqiang MA<sup>†</sup>, Kenji NAKAYAMA<sup>†</sup> and Gaishi YAMAMOTO<sup>†</sup>, *Members*

あらまし SC フィルタを LSI 化するにはチップ面積の低減、動作の高速化、および低消費電力化が重要である。これらのことは SC フィルタの総容量を低減することにより達成される。一方、SC フィルタの回路構成として縦続形構成がよく用いられるが、この回路形式の総容量は零点と極の組合せおよび 2 次回路の並べ順によって大きく変化する。本論文では縦続形 SC フィルタにおける総容量を最小化するための組合せ/並べ順に対する一般的な条件を求めている。まず、2 次 SC 回路における零点と極の配置および信号レベルのスケーリング係数と総容量の関係を求めている。この関係に基づき、2 次 SC 回路における総容量を低減する条件を求め、これを更に組合せ/並べ順の条件に拡張している。この条件を要約すると、「最も  $Q$  の高い極の前段までに、この極に近い零点と  $Q$  の低い極を配置する」というものである。具体例として 9 次と 11 次の低域通過フィルタおよび高域通過フィルタを用い、この条件を課したときの総容量の分布を調べている。その結果、総容量がその最小値から 5% 以内である範囲に組合せ/並べ順の約 40% 以上が分布しており、本条件の有効性が確認されている。このことは、最適な組合せ/並べ順を見出すのに必要な探索回数が大幅に低減できることを意味している。

### 1. ま え が き

スイッチトキャパシタ(SC)フィルタはスイッチ、容量およびオペアンプから構成され、アナログ回路を集積化するための重要な技術である。特に、アナログ/デジタルインタフェース、高周波信号処理および低消費電力が必要とされる分野では積極的に LSI 化された SC フィルタの導入が図られている<sup>(1),(2)</sup>。

SC フィルタの LSI 化の際に重要なポイントは(1)小形化、(2)低消費電力化、(3)高周波数化の 3 点である。(1)に関しては、微細化技術によりオペアンプやスイッチの小形化を図ることができる。しかし容量は微細化できず、SC フィルタのチップ面積に占める容量の割合が大きくなる。(2)と(3)に関してはオペアンプに対する負荷容量を軽減することにより改善できる。以上のごとく、SC フィルタの LSI 化にとっては容量の低減が重要なファクタとなっている。

容量を減らす方法は 2 段階に分けられる。第 1 段階は SC フィルタの回路構成の段階で最小容量を 1 に規格化したときの総容量を減らすことである。これは、容量値のばらつきを圧縮することに相当する。第 2 段階

は最小容量(=1)を実現する LSI 上の単位容量を小さくすることである。しかし、これには容量比精度や雑音特性などの点から限界があり、実際は 0.1~0.5 pF 程度がよく用いられる<sup>(2)</sup>。

本研究では SC フィルタの標準的な回路形式としてよく用いられる 2 次縦続形回路の総容量を低減する問題を取り上げる。この回路形式では零点と極の組合せおよび 2 次回路の並べ順に対して大きな自由度があり、総容量はこれらの選択によって大きく変化する。従って、総容量を最小にする最適な組合せ/並べ順を求める必要がある。

この問題は既に Cai らにより検討されている<sup>(3)</sup>。彼らの方法では、信号レベルのスケーリングを各 2 次回路で行っているため、SC フィルタの入力から各オペアンプの出力に至る過程でダイナミックレンジに過不足が生じる。また、具体的なフィルタについて総容量の分布を求めているが、組合せ/並べ順と総容量の関係について一般的な法則性が明らかにされていない。

本研究では、このような問題点を解決し、最適な組合せ/並べ順に対する一般的な条件を求めることを目的としている<sup>(4),(5)</sup>。まず、信号レベルのスケーリングに関しては、SC フィルタの入力から各オペアンプ出力までの振幅特性の最大値を制限する  $L_{\infty}$  ノルムスケーリング<sup>(6)</sup>を採用する。次に 2 次 SC 回路において、零点

<sup>†</sup> 金沢大学工学部電気・情報工学科、金沢市  
Faculty of Technology, Kanazawa University, Kanazawa-shi, 920  
Japan

と極の配置および信号レベルのスケーリング係数と総容量の関係について調べる。この結果に基づき、組合せ/並べ順の満たすべき条件を導く。更に、この条件を制約条件として課すことにより、少ない探索回数で最適な組合せ/並べ順を見出すことができることを示す。具体例として、9次と11次の低域通過フィルタ(LPF)、高域通過フィルタ(HPF)を用いて、本論文で提案した条件の有効性を確認する。

## 2. SCフィルタの縦続構成における総容量

### 2.1 2次SC回路

2次回路として図1に示す Martin-Sedra の回路<sup>(7)</sup>を対象とする。しかしながら、本論文で対象とする周波数選択性を有するフィルタの場合、他の回路形式、例えば Fleisher-Laker の2次回路<sup>(8)</sup>も図1の回路に帰着されるため一般性を失わない。

入力信号を  $V_{in}(z)$ 、第1段のオペアンプ出力を  $V_1(z)$ 、出力信号を  $V_{out}(z)$  とし、伝達関数  $H_1(z)$ 、 $H(z)$  を次のように定義する。

$$H_1(z) = \frac{V_1(z)}{V_{in}(z)} \quad (1a)$$

$$H(z) = \frac{V_{out}(z)}{V_{in}(z)} \quad (1b)$$

これらの伝達関数は図1の容量を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{[C_{23}(C_{11} + C_{12}) - (C_{13} + C_{14})(C_{20} + C_{21})]}{[C_{10}C_{20} + C_{10}C_{21}]} \sim \\ &\sim \frac{[C_{14}C_{21} + C_{20}(C_{13} + 2C_{14}) - C_{23}(C_{11} + 2C_{12})]z^{-1}}{[C_{12}C_{22} + C_{11}C_{22} - C_{10}C_{21} - 2C_{10}C_{20}]z^{-1}} \sim \\ &\sim \frac{[C_{12}C_{23} - C_{14}C_{20}]z^{-2}}{[C_{10}C_{20} - C_{12}C_{22}]z^{-2}} \quad (2a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= -\frac{[C_{10}C_{23}] + [C_{13}C_{22} + C_{14}C_{22} - 2C_{10}C_{23}]z^{-1}}{[C_{10}C_{20} + C_{10}C_{21}] + [C_{12}C_{22} + C_{11}C_{22} - C_{10}C_{21}]z^{-1}} \sim \\ &\sim \frac{[C_{10}C_{23} - C_{14}C_{22}]z^{-2}}{-2C_{10}C_{20}z^{-1} + [C_{10}C_{20} - C_{12}C_{22}]z^{-2}} \quad (2b) \end{aligned}$$

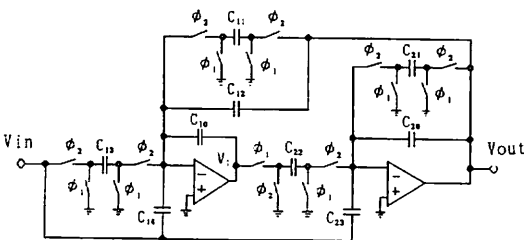


図1 Martin-Sedra の2次SC回路  
Fig.1 Biquad SC circuit by Martin & Sedra.

### 2.2 零点、極と容量の関係

本論文では、周波数選択性を有するフィルタを対象とする。なぜならば、これらのフィルタでは、一般に  $Q$  が高く、従って、総容量が大きい。また、総容量が零点と極の組合せ/並べ順に依存して大きく変化するからである。このようなフィルタに対してはだ円フィルタが実用的であるため、以下これを対象とする。この場合、零点はすべて単位円上にあり、極は安定性から常に単位円内にある。零点と極を各々極形式  $\exp(\pm j\theta_z)$ 、 $r_p \exp(\pm j\theta_p)$  で表す。

次に、これらのパラメータ  $\theta_z$ 、 $r_p$ 、 $\theta_p$  と容量の関係を求める。零点と極を用いると式(1b)の  $H(z)$  は次のように表される。

$$H(z) = -\frac{1 - 2\cos \theta_z z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r_p \cos \theta_p z^{-1} + r_p^2 z^{-2}} \quad (3)$$

ここで各係数に対しては、次の条件がある。

$$\begin{aligned} 0 < r_p < 1 \\ 0 \leq \theta_z \leq \pi \quad -2 \leq -2\cos \theta_z \leq 2 \\ 0 \leq \theta_p \leq \pi \quad -2 \leq -2r_p \cos \theta_p \leq 2 \end{aligned} \quad (4)$$

式(2b)を、次のように変形する。

$$\begin{aligned} H(z) &= -\frac{C_{10}C_{23}}{C_{10}C_{20} + C_{10}C_{21}} \cdot \frac{1 + \frac{C_{13}C_{22} + C_{14}C_{22} - 2C_{10}C_{23}}{C_{10}C_{23}}z^{-1}}{1 + \frac{C_{12}C_{22} + C_{11}C_{22} - C_{10}C_{21} - 2C_{10}C_{20}}{C_{10}C_{20} + C_{10}C_{21}}z^{-1}} \sim \\ &\sim \frac{C_{10}C_{23} - C_{14}C_{22}}{C_{10}C_{23}}z^{-2} \cdot \frac{1 + \frac{C_{13}C_{22} + C_{14}C_{22} - 2C_{10}C_{23}}{C_{10}C_{23}}z^{-1}}{1 + \frac{C_{12}C_{22} + C_{11}C_{22} - C_{10}C_{21} - 2C_{10}C_{20}}{C_{10}C_{20} + C_{10}C_{21}}z^{-1}} \sim \\ &\sim \frac{C_{10}C_{23} - C_{14}C_{22}}{C_{10}C_{23}}z^{-2} \cdot \frac{1 + \frac{C_{13}C_{22} + C_{14}C_{22} - 2C_{10}C_{23}}{C_{10}C_{23}}z^{-1}}{1 + \frac{C_{12}C_{22} + C_{11}C_{22} - C_{10}C_{21} - 2C_{10}C_{20}}{C_{10}C_{20} + C_{10}C_{21}}z^{-1}} \quad (5) \end{aligned}$$

式(3)と(5)を比較することにより次の関係が得られる。

$$\frac{C_{10}C_{23}}{C_{10}C_{20} + C_{10}C_{21}} = 1 \quad (6a)$$

$$\frac{C_{13}C_{22} + C_{14}C_{22} - 2C_{10}C_{23}}{C_{10}C_{23}} = -2\cos \theta_z \quad (6b)$$

$$\frac{C_{10}C_{23} - C_{14}C_{22}}{C_{10}C_{23}} = 1 \quad (6c)$$

$$\frac{C_{12}C_{22} + C_{11}C_{22} - C_{10}C_{21} - 2C_{10}C_{20}}{C_{10}C_{20} + C_{10}C_{21}} = -2r_p \cos \theta_p \quad (6d)$$

$$\frac{C_{10}C_{20} - C_{12}C_{22}}{C_{10}C_{20} + C_{10}C_{21}} = r_p^2 \quad (6e)$$

式(6a)~(6e)の条件は5個であるのに対して、容量は9個であるから一意的には決まらない。いくつかの容量を固定する必要がある。まず、式(3)、(4)の条件を考慮すると次の2通りの選択が可能である。

表1 零点と極による容量の表現

| 条件<br>容量 | (A)<br>$C_{12}=C_{14}=0$               | (B)<br>$C_{21}=C_{14}=0$       |
|----------|--|--------------------------------|
| $C_{10}$ | 1                                      | 1                              |
| $C_{11}$ | $(1-2r_p \cos \theta_p + r_p^2)/r_p^2$ | $1-2r_p \cos \theta_p + r_p^2$ |
| $C_{12}$ | 0                                      | $1-r_p^2$                      |
| $C_{13}$ | $2(1-\cos \theta_z)/r_p^2$             | $2(1-\cos \theta_z)$           |
| $C_{14}$ | 0                                      | 0                              |
| $C_{20}$ | 1                                      | 1                              |
| $C_{21}$ | $(1-r_p^2)/r_p^2$                      | 0                              |
| $C_{22}$ | 1                                      | 1                              |
| $C_{23}$ | $1/r_p^2$                              | 1                              |

$$(A) \quad C_{12}=C_{14}=0 \quad (7a)$$

$$(B) \quad C_{21}=C_{14}=0 \quad (7b)$$

いずれの場合も、容量において、まだ2個の冗長性がある。そこで、

$$C_{10}=C_{20}=1 \quad (8)$$

とする。後で述べるように信号レベルのスケールリングにより容量もスケールリングされ、かつ総容量を計算する際に、最小容量が1に正規化されるため、式(8)の条件は一般性を失うものではない。式(6), (7), (8)より(A), (B)の場合について、容量を零点、極を用いて表すと表1のようになる。

### 2.3 信号レベルのスケールリング

SCフィルタでは、オペアンプの出力波形がひずまないように、信号レベルでのスケールリングを行う。具体的にはフィルタ入力から*i*番目のオペアンプの出力までの伝達関数を  $F_i(z)$  とするとき、

$$\max_{\omega} |F_i(e^{j\omega})| = 1 \quad (9)$$

が成り立つように、信号レベルをスケールリングする。これは  $L_{\infty}$  ノルムスケールリングと呼ばれる<sup>(6)</sup>。

このスケールリングは容量を次のように変えることにより行われる。あるオペアンプの出力信号のみを  $k$  倍し、全体の伝達関数を不変に保つためには、積分容量を  $1/k$  倍し、出力側に接続される容量をすべて  $1/k$  倍すればよい<sup>(2)</sup>。例えば、図1の2次回路において、 $V_1$  を  $k_1$  倍、 $V_{out}$  を  $k_2$  倍するためには、容量を次のように変更すればよい。

(A)  $C_{12}=C_{14}=0$  の場合

$$\hat{C}_{10} = \frac{C_{10}}{k_1} = \frac{1}{k_1} \quad (10a)$$

$$\hat{C}_{11} = \frac{C_{11}}{k_2} = \frac{1}{k_2} \cdot \frac{1-2r_p \cos \theta_p + r_p^2}{r_p^2} \quad (10b)$$

$$\hat{C}_{13} = \frac{C_{13}}{k_2'} = \frac{1}{k_2'} \cdot \frac{2(1-\cos \theta_z)}{r_p^2} \quad (10c)$$

$$\hat{C}_{20} = \frac{C_{20}}{k_2} = \frac{1}{k_2} \quad (11a)$$

$$\hat{C}_{21} = \frac{C_{21}}{k_2} = \frac{1}{k_2} \cdot \frac{1-r_p^2}{r_p^2} \quad (11b)$$

$$\hat{C}_{22} = \frac{C_{22}}{k_1} = \frac{1}{k_1} \quad (11c)$$

$$\hat{C}_{23} = \frac{C_{23}}{k_2'} = \frac{1}{k_2'} \cdot \frac{1}{r_p^2} \quad (11d)$$

(B)  $C_{21}=C_{14}=0$  の場合

$$\hat{C}_{10} = \frac{C_{10}}{k_1} = \frac{1}{k_1} \quad (12a)$$

$$\hat{C}_{11} = \frac{C_{11}}{k_2} = \frac{1-2r_p \cos \theta_p + r_p^2}{k_2} \quad (12b)$$

$$\hat{C}_{12} = \frac{C_{12}}{k_2} = \frac{1-r_p^2}{k_2} \quad (12c)$$

$$\hat{C}_{13} = \frac{C_{13}}{k_2'} = \frac{2(1-\cos \theta_z)}{k_2'} \quad (12d)$$

$$\hat{C}_{20} = \frac{C_{20}}{k_2} = \frac{1}{k_2} \quad (13a)$$

$$\hat{C}_{22} = \frac{C_{22}}{k_1} = \frac{1}{k_1} \quad (13b)$$

$$\hat{C}_{23} = \frac{C_{23}}{k_2'} = \frac{1}{k_2'} \quad (13c)$$

ここで、 $k_2'$  は前段の2次回路の  $V_{out}$  に対するスケールリング係数である。

### 2.4 2次SC回路の総容量

スケールリング後の容量を用いて総容量が計算される。このとき、電荷保存則を形成する容量のグループ内での最小容量が1に規格化される。この容量グループは図1の回路では、 $C_{1i}$ ,  $i=0 \sim 4$ 、と  $C_{2i}$ ,  $i=0 \sim 3$ 、の2グループである。

まず、規格化する前の式(10)~(13)の  $\hat{C}_{1i}$ ,  $\hat{C}_{2i}$  の和を  $\hat{C}_{r1}$ ,  $\hat{C}_{r2}$  とすると、次のように表される。

(A)  $C_{12}=C_{14}=0$  の場合

$$\hat{C}_{r1} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \cdot \frac{1-2r_p \cos \theta_p + r_p^2}{r_p^2} + \frac{1}{k_2'} \cdot \frac{2(1-\cos \theta_z)}{r_p^2} \quad (14a)$$

$$\hat{C}_{r2} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_2} \cdot \frac{1-r_p^2}{r_p^2} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2'} \cdot \frac{1}{r_p^2} \quad (14b)$$

(B)  $C_{21}=C_{14}=0$  の場合

$$\hat{C}_{r1} = \frac{1}{k_1} + \frac{1-2r_p \cos \theta_p + r_p^2}{k_2} + \frac{1-r_p^2}{k_2} + \frac{2(1-\cos \theta_z)}{k_2'} \quad (15a)$$

$$\hat{C}_{r2} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2'} \quad (15b)$$

更に、 $\hat{C}_{r1}$ ,  $\hat{C}_{r2}$  における最小容量を 1 に規格化したときの  $\hat{C}_{r1}$ ,  $\hat{C}_{r2}$  を  $C_{r1}$ ,  $C_{r2}$  とする。総容量は、

$$C_T = C_{r1} + C_{r2} \quad (16)$$

で与えられる。

### 3. 2 次回路における総容量を低減する条件

#### 3.1 スケーリング係数と総容量の関係

式(14), (15)に示すように、2 次回路における総容量は  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $r_p$ ,  $\theta_p$ ,  $\theta_z$  によって決まる。本節では、これらのパラメータと総容量  $C_T$  との関係について述べる。

(A)  $C_{i2} = C_{i4} = 0$  の場合

総容量  $C_T$  は式(14 a), (14 b)で最小容量を 1 に規格化したときの値である。従って、容量のばらつきが大きい場合に  $C_T$  は大きくなる。式(14 b)によれば、 $r_p$  が 1 に近いほど  $C_{r2}$  が大きくなる。すなわち、 $Q$  の高い 2 次回路ほど  $C_{r2}$ 、従って  $C_T$  が大きいことになる。SC フィルタ全体の総容量を低減するためには、この  $Q$  の高い 2 次回路の容量を減らすことが重要である。以下はこの問題について検討する。

式(14)は

$$r_p \approx 1 \quad (17)$$

とすると、近似的に次のように表される。

$$\hat{C}_{r1} \approx \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} 2(1 - \cos \theta_p) + \frac{1}{k'_2} 2(1 - \cos \theta_z) \quad (18 a)$$

$$\hat{C}_{r2} \approx \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_2} (1 - r_p^2) + \frac{1}{k'_2} \quad (18 b)$$

従って、 $Q$  の高い 2 次回路では、 $(1 - r_p^2)/k_2$  が非常に小さくなり、これを 1 に規格化することより、 $C_{r2}$  は  $\hat{C}_{r1}$  に比べて大きくなり、 $C_T$  に占める割合も大きくなる。そこで、まず  $C_{r2}$  を小さくする条件を考える。

式(18 b)の  $\hat{C}_{r2}$  を  $(1 - r_p^2)/k_2$  で規格化することより、

$$C_{r2} = \frac{1}{1 - r_p^2} + 1 + \frac{1}{1 - r_p^2} \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_2}{k'_2} \right) \quad (19)$$

となる。ここで、 $r_p$  は伝達関数から決まっており、組合せ/並べ順の段階で  $C_{r2}$  を最小化するためには

$$\frac{k_2}{k_1} \rightarrow \text{小} \quad (20 a)$$

$$\frac{k_2}{k'_2} \rightarrow \text{小} \quad (20 b)$$

が必要である。

次に、 $\hat{C}_{r1}$  について考える。この場合は  $\theta_p$  と  $\theta_z$  の関係より、次の 2 通りが考えられる。まず、 $2(1 - \cos \theta_p)/$

$k_2$  が最小容量である場合、 $C_{r1}$  の最小化条件は式(20)と同じになる。次に、 $2(1 - \cos \theta_z)/k'_2$  が最小容量である場合、 $C_{r1}$  の最小化条件は

$$\frac{k'_2}{k_1} \rightarrow \text{小} \quad (21 a)$$

$$\frac{k'_2}{k_2} \rightarrow \text{小} \quad (21 b)$$

となる。式(21 a)は(20 a)と類似するが、式(21 b)は(20 b)と逆の条件となる。しかしながら、前述するように、または 6. の設計例でも示すように、 $Q$  の高い 2 次回路では  $C_{r2}$  が支配的であるから、式(20)の条件を優先的に採用する。

(B)  $C_{21} = C_{i4} = 0$  の場合

式(15)において、 $r_p^2 \approx 1$  とすると、

$$\hat{C}_{r1} \approx \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} 2(1 - \cos \theta_p) + \frac{1}{k_2} (1 - r_p^2) + \frac{1}{k'_2} 2(1 - \cos \theta_z) \quad (22 a)$$

$$\hat{C}_{r2} \approx \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k'_2} \quad (22 b)$$

となる。この場合は  $\hat{C}_{r1}$  における  $(1 - r_p^2)/k_2$  が非常に小さくなり、従って、 $C_{r1}$  が  $C_{r2}$  に比べて支配的となる。 $\hat{C}_{r1}$  を  $(1 - r_p^2)/k_2$  で規格化することより、 $C_{r1}$  は

$$C_{r1} = \frac{2(1 - \cos \theta_p)}{1 - r_p^2} + 1 + \frac{1}{1 - r_p^2} \left[ \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_2}{k'_2} 2(1 - \cos \theta_z) \right] \quad (23)$$

となる。従って、 $C_{r1}$  を最小化するための条件は式(20)と同じになる。

以上の結果から、 $Q$  の高い 2 次 SC 回路の総容量を最小化するためのスケーリング係数に対する条件として式(20)を採用する。

#### 3.2 振幅特性に対する条件

式(20 a), (20 b)に示した条件を零点、極の組合せ/並べ順に対する条件に変換する前準備として、式(20 a)の条件を  $H_1(z)$ ,  $H(z)$  の振幅特性に対する条件に変換する。

(A)  $C_{i2} = C_{i4} = 0$

$H_1(z)$ ,  $H(z)$  を各々零点  $z_z$ ,  $z'_z$  と極  $z_p$  を用いて次のように表す。

$$H_1(z) = h_{10} \frac{1 - z'_z z^{-1}}{(1 - z_p z^{-1})(1 - z^*_p z^{-1})} \quad (24 a)$$

$$H(z) = -h_0 \frac{(1 - z_z z^{-1})(1 - z^*_z z^{-1})}{(1 - z_p z^{-1})(1 - z^*_p z^{-1})} \quad (24 b)$$

$z'_z$ ,  $h_{10}$ ,  $h_0$  を式(2 a), (2 b)の関係をjいて次のように表す。

$$z'_z = \frac{C_{23}C_{11} - C_{20}C_{13}}{C_{23}C_{11} - C_{20}C_{13} - C_{13}C_{21}} \quad (25 \text{ a})$$

$$h_{10} = \frac{C_{23}C_{11} - C_{13}(C_{20} + C_{21})}{C_{10}(C_{20} + C_{21})} \quad (25 \text{ b})$$

$$h_0 = \frac{C_{23}}{(C_{20} + C_{21})} \quad (25 \text{ c})$$

式(10), (11)の  $\hat{C}_{1i}$ ,  $\hat{C}_{2i}$  を代入して, 式(17)を考慮すれば  $z'_z$ ,  $h_{10}$ ,  $h_0$  は近似的に次のように表される.

$$z'_z \approx 1 \quad (26)$$

$$h_{10} \approx 2 \frac{k_1}{k'_2} (\cos \theta_z - \cos \theta_p) \quad (27 \text{ a})$$

$$h_0 \approx \frac{k_2}{k'_2} \quad (27 \text{ b})$$

一方,  $H_1(z)$ ,  $H(z)$  の振幅特性の最大値を  
 $H_{1\max} = \max_{\omega} \{ |H_1(e^{j\omega})| \} \quad (28 \text{ a})$

$$H_{\max} = \max_{\omega} \{ |H(e^{j\omega})| \} \quad (28 \text{ b})$$

とする. これらは近似的に  $z = \exp(j\theta_p)$  で生じるから,

$$H_{1\max} = \left| h_{10} \frac{\exp(j\theta_p) - z'_z}{(\exp(j\theta_p) - z_p)(\exp(j\theta_p) - z^{*}_p)} \right| \quad (29 \text{ a})$$

$$H_{\max} = \left| h_0 \frac{(\exp(j\theta_p) - z_z)(\exp(j\theta_p) - z^{*}_z)}{(\exp(j\theta_p) - z_p)(\exp(j\theta_p) - z^{*}_p)} \right| \quad (29 \text{ b})$$

となる. 更に, 上式は次のように変形できる.

$$H_{1\max} = \left| h_{10} \frac{2\sin(\theta_p/2)}{(1 - r_p)(1 - r_p \exp(-j2\theta_p))} \right| \quad (30 \text{ a})$$

$$H_{\max} = \left| h_0 \frac{2\sin((\theta_z - \theta_p)/2) \cdot 2\sin((\theta_z + \theta_p)/2)}{(1 - r_p)(1 - r_p \exp(-j2\theta_p))} \right| \quad (30 \text{ b})$$

式(27)を考慮して比をとると,

$$\frac{H_{1\max}}{H_{\max}} = \frac{k_1}{k_2} \left| 2\sin \frac{\theta_p}{2} \right| \quad (31)$$

となる. これより,

$$\frac{k_2}{k_1} = \left| 2\sin \frac{\theta_p}{2} \right| \frac{H_{\max}}{H_{1\max}} \quad (32)$$

を得る.

式(32)の中の  $\theta_p$  はフィルタ特性によるものであり, 零点, 極の組合せ/並べ順によって変化しない. 従って, 式(32)より式(20 a)のスケール係数に対する条件は次の最大振幅に対する条件に変換される.

$$\frac{H_{\max}}{H_{1\max}} \rightarrow \text{小} \quad (33)$$

$$(B) \quad C_{21} = C_{14} = 0$$

式(2 a)より,  $H_1(z)$  の分子は次のように表される.

$$N_1(z) = 1 + \frac{C_{20}C_{13} - C_{23}(C_{11} + 2C_{12})}{C_{23}(C_{11} + C_{12}) - C_{13}C_{20}} z^{-1}$$

$$+ \frac{C_{12}C_{23}}{C_{23}(C_{11} + C_{12}) - C_{13}C_{20}} z^{-2} \quad (34)$$

上式に式(12), (13)を代入し,  $r_p \approx 1$  とすると次のようになる.

$$N_1(z) \approx 1 - z^{-1} \quad (35)$$

従って, 零点は(A)の場合と同様に,

$$z'_z \approx 1 \quad (36)$$

となる. 一方,  $h_{10}$ ,  $h_0$  は次のようになる.

$$\begin{aligned} h_{10} &= \frac{C_{23}(C_{11} + C_{12}) - C_{13}C_{20}}{C_{10}C_{20}} \\ &\approx 2 \frac{k_1}{k'_2} (\cos \theta_z - \cos \theta_p) \end{aligned} \quad (37 \text{ a})$$

$$h_0 = \frac{C_{23}}{C_{20}} = \frac{k_2}{k'_2} \quad (37 \text{ b})$$

式(36), (37)は(A)の結果である式(26), (27)と同じであるから, 式(32)が同様に導かれ,  $H_{\max}/H_{1\max}$  に対する条件も同じになる.

次に, 式(20 b)の条件について考える.  $k'_2$  は前段の  $V_{\text{out}}$  に対するスケール係数であるから,  $k_2$  とは独立に決められる. 式(20 b)の条件を満たすためには  $k'_2$  は大きいことが望ましい. 式(30 b)を前段の  $H_{\max}$  とし,  $H_{\max} = 1$  の条件下で  $h_0$ , すなわち前段の  $k'_2$  を大きくするためには,

$$r_p \rightarrow \text{小} \quad (38 \text{ a})$$

$$|\theta_z - \theta_p| \rightarrow \text{小} \quad (38 \text{ b})$$

とすればよい. すなわち,  $Q$  の低い極を用い, 零点は極に近いものを用いばよい.

#### 4. 総容量最小化の組合せ/並べ順に対する条件

前章において, 2次SC回路の総容量を低減するための条件を求めた. 振幅特性に対しては式(33)が, また前段の2次回路の零点, 極に対しては式(38)が条件となる. 本章では, これらの条件を零点, 極の組合せ/並べ順に対する条件に置き換える.

まず, 式(33)の条件について考える.  $H_1(z)$  の零点は式(26)で与えられるように,  $z=1$  の近傍である. 一方,  $H(z)$  の零点は全体の伝達関数の零点である. 極はいずれも伝達関数の極で同じ値である.  $H_{1\max}$ ,  $H_{\max}$  を与える周波数を各々  $f_{1\max}$ ,  $f_{\max}$  とすると, 上記の零点配置の関係から  $f_{\max}$  が  $f_{1\max}$  に比べて, 通過域の方にずれることになる. この様子を図2に示す. この場合に,  $L_{\infty}$  ノルムのスケールで式(33)を満たすためには, 前段までの振幅特性が図2に示すように, 通過域から阻止域に向かって急しゅんな傾斜をもつ必要があ

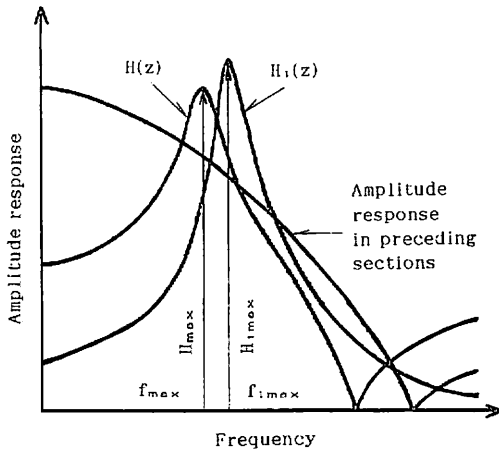


図2  $H_1(z)$  と  $H(z)$  および前段までの振幅特性との関係  
Fig.2 Amplitude responses for  $H_1(z)$ ,  $H(z)$  and preceding section.

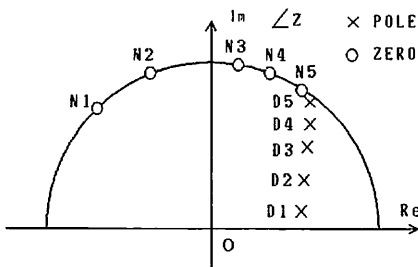


図3 零点と極配置の例  
Fig.3 Example of pole and zero locations.

る。

3.でも述べたように、縦続形SCフィルタの総容量のうち  $Q$  の高い2次SC回路の容量の占める割合が大きく、上の条件は  $Q$  の高い2次SC回路に対して優先的に適用することが必要である。このことを組合せ/並べ順で見ると、①「 $Q$  の高い極の前段までに、この極に近い零点を配置する」ことになる。次に、式(38)の条件から②「 $Q$  の高い極の前段には  $Q$  の低い極を配置する」。

①、②の制約条件を図3の零点、極配置の例を用いて説明する。 $N_i$  は零点を、 $D_i$  は極を表している。最も  $Q$  の高い極は  $D5$  である。①の条件より、 $D5$  の前段にこれに近い零点  $N4, N5$  を配置する。②の条件より、前段の極は  $D1, D2$  とする。 $D5$  の次に  $Q$  の高い  $D4$  に対しても、同様な配置をする。このような条件を満たし、かつ若干の自由度を有する組合せ/並べ順に対する制約条件を図4に示す。この制約条件は、例えば零点  $N3$

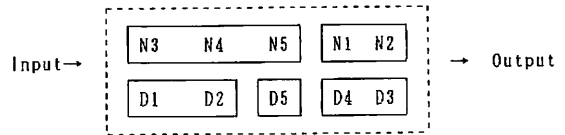


図4 組合せ/並べ順に対応する制約条件  
Fig.4 Constraint on pairing and ordering.

～ $N5$  は第1～第3区間のいずれかに割り当てられ、 $D5$  は第3区間に固定されることを意味している。

## 5. $C_{14}=0, C_{21}=0$ と総容量の関係

2.では、だ円フィルタを実現する回路として、(A)  $C_{14}=C_{12}=0$  と (B)  $C_{21}=C_{14}=0$  の場合を示し、3.ではこれら双方について組合せ/並べ順の条件を求めた。しかし、実際の設計に際しては(A)と(B)のいずれを選択すべきか、という問題がある。ここでは、(A)、(B)の回路形式と総容量の関係について調べる。

零点と極の  $\theta_z, \theta_p$  はフィルタの帯域幅、すなわちカットオフ周波数  $f_c$  によって決まり、 $r_p$  は振幅特性の急しゅんさやリップルによって決まる。このようなフィルタ特性を決めるパラメータと総容量の關係に着目する。ここでも、容量のばらつきが大きい  $Q$  の高い2次回路について議論する。

まず、(A)の場合は式(8)からわかるように、 $2(1-\cos \theta_p)$  と  $2(1-\cos \theta_z)$  が  $\hat{C}_{r1}$  に、 $(1-r_p^2)$  が  $\hat{C}_{r2}$  に分かれている。また、 $\theta_p$  と  $\theta_z$  は  $f_c$  の変化に対して連動して移動するため  $2(1-\cos \theta_p)$  と  $2(1-\cos \theta_z)$  の比はあまり変化しない。 $\hat{C}_{r2}$  は  $(1-r_p^2)$  で決まるから、やはり  $f_c$  に対して変化は小さい。要するに、(A)の回路形式では  $f_c$  の変化に対して総容量はあまり変化しない。

一方、(B)の回路形式では式(22)からわかるように、上記の三つのパラメータがすべて  $\hat{C}_{r1}$  に含まれている。従って、 $f_c$  が高く、 $\theta_p, \theta_z$  が大きい場合は  $(1-r_p^2)/k_2$  が最小容量として変化しないのに対して、 $2(1-\cos \theta_p)/k_2$  と  $2(1-\cos \theta_z)/k_2$  が大きくなるため、総容量は大きくなる。次に、 $f_c$  が低い場合、すなわち、 $\theta_p, \theta_z$  が小さい場合は総容量は小さくなる。狭帯域のLPF、広帯域のHPFがこれに相当する。

従って、総容量を低減するためには、カットオフ周波数  $f_c$  が高い場合は(A)が、 $f_c$  が低い場合は(B)の回路形式が有効である。これらの比較については6.の設計例でも説明する。

## 6. 設 計 例

本論文で提案した組合せ/並べ順に対する条件の有効性を確認するために、9次と11次のLPFとHPFを用いて総容量に対する組合せ/並べ順の分布を調べた。

### (1) フィルタ特性と伝達関数

フィルタのカットオフ周波数を表2に示す。これは9次と11次で共通である。 $f_s$ はサンプリング周波数を表す。通過域リップル( $A_p$ )と阻止域減衰量( $A_s$ )は9次のフィルタが0.177 dBと63.3 dBで、11次のフィルタが0.177 dBと83.1 dBである。例として、LPF( $N$ )とHPF( $N$ )の振幅特性を図5に示し、零点と極の値を表3、4に示す。

### (2) 総容量に対する組合せ/並べ順の分布

組合せ/並べ順に制約を課さないときの総容量に対する組合せ/並べ順の分布を調べた。9次のフィルタでは、2,880通りのすべての場合について調べ、11次のフィルタでは組合せ/並べ順の総数が86,400通りと多いため、2,000通りの組合せ/並べ順を無作為に抽出してそれらに対する総容量を調べた。但し、1次の分子、分母は組合せを固定し、1次SC回路で構成した。

図6に回路形式(A)についての総容量に対する組合

表2 9次、11次フィルタのカットオフ周波数

| LPF     |         | HPF     |         |
|---------|---------|---------|---------|
| ( $N$ ) | ( $W$ ) | ( $N$ ) | ( $W$ ) |
| 0.108   | 0.304   | 0.320   | 0.119   |

( $\times f_s$ )

表3 9次LPF( $N$ )の零点、極

|      | $r_z$ | $\theta_z(\text{deg.})$ |      | $r_p$ | $\theta_p(\text{deg.})$ |
|------|-------|-------------------------|------|-------|-------------------------|
| $N1$ | 1     | 180.0                   | $D1$ | 0.760 | 0.0                     |
| $N2$ | 1     | 79.7                    | $D2$ | 0.814 | 21.1                    |
| $N3$ | 1     | 53.2                    | $D3$ | 0.902 | 32.7                    |
| $N4$ | 1     | 45.5                    | $D4$ | 0.959 | 37.5                    |
| $N5$ | 1     | 43.1                    | $D5$ | 0.989 | 39.2                    |

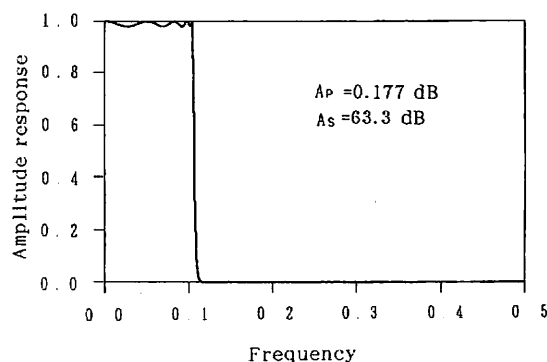
表4 11次HPF( $N$ )の零点、極

|      | $r_z$ | $\theta_z(\text{deg.})$ |      | $r_p$ | $\theta_p(\text{deg.})$ |
|------|-------|-------------------------|------|-------|-------------------------|
| $N1$ | 1     | 0.0                     | $D1$ | 0.669 | 180.0                   |
| $N2$ | 1     | 58.3                    | $D2$ | 0.729 | 149.0                   |
| $N3$ | 1     | 88.7                    | $D3$ | 0.837 | 130.0                   |
| $N4$ | 1     | 101.7                   | $D4$ | 0.917 | 120.7                   |
| $N5$ | 1     | 107.2                   | $D5$ | 0.963 | 116.4                   |
| $N6$ | 1     | 109.2                   | $D6$ | 0.990 | 114.8                   |

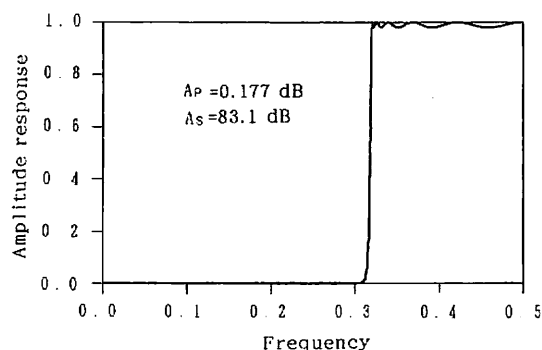
せ/並べ順の分布の例を示す。横軸は総容量を示し、最小の総容量( $C_{\min}$ )を1に規格化している。縦軸は組合せ/並べ順の発生率である。回路形式(B)についても同様の結果が得られた。全体的な傾向としては、 $C_{\min}$ の2倍ぐらいまで分布していること、 $C_{\min}$ に比べて、5%以内の発生率は約2%と低いことがわかる。

### (3) 制約条件を課したときの総容量の分布

次に、本論文で提案した制約条件を組合せ/並べ順に課したときの分布を調べる。今回用いた制約条件を図7に示す。例えば、9次のLPFでは $D5$ が第3区間に、 $D4$ が第4区間に固定されており、 $N4, N5$ は第1、第2区間のいずれかに割り当てられる。1次回路である $N1/D1$ は組合せが固定され、すべての区間に配置されるものとする。 $N1/D1$ の配置により、他の零点と極の配置される区間は自動的にシフトされる。この結果、9次のフィルタでは $(2!)^3 \times 5 = 40$ 通り、11次のフィルタでは $(3!)^2 \times 2! \times 6 = 432$ 通りの組合せ/並べ順に制



(a) 9th-order LPF( $N$ )

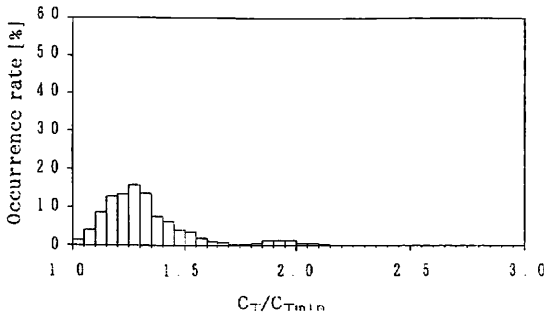


(b) 11th-order HPF( $N$ )

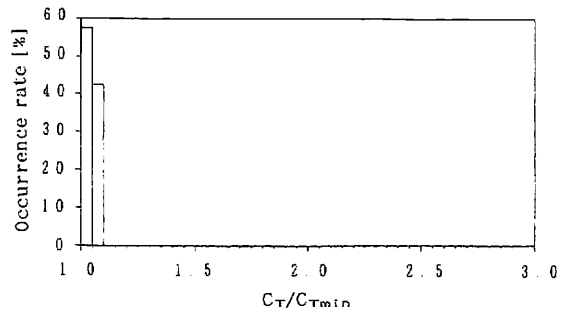
図5 SCフィルタの振幅特性

Fig. 5 Amplitude responses of SC filters.

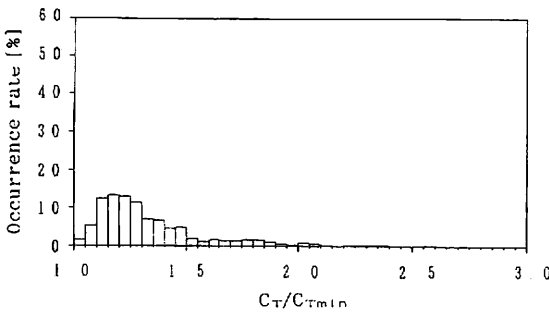




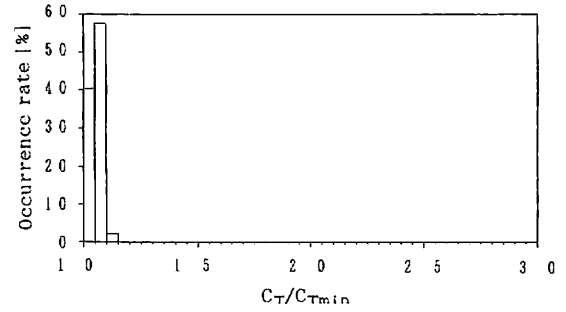
(a) 9th-order LPF(N)



(b) 9th-order LPF(N)



(b) 11th-order HPF(N)



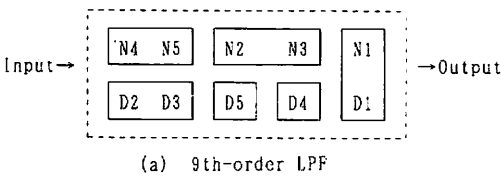
(b) 11th-order HPF(N)

図 6 制約条件を課さないときの総容量に対する組合せ/並べ順の分布図

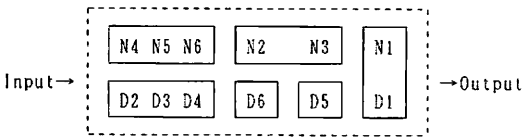
Fig. 6 Distributions of pairing and ordering assignments evaluated on total capacitance without any constraint.

図 8 制約条件を課したときの総容量に対する組合せ/並べ順の分布図

Fig. 8 Distributions of pairing and ordering assignments evaluated on total capacitance with constraints shown in Fig. 7.



(a) 9th-order LPF



(b) 11th-order HPF

図 7 組合せ/並べ順に対応する制約条件  
Fig. 7 Constraints on pairing and ordering.

限されることになる。

制約条件を課したときの回路形式(A)の場合の総容量に対する組合せ/並べ順の分布を図8に示す。いずれの場合も、 $C_{Tmin}$  から5%~10%の範囲に大半が集中し、5%以内についても40%以上の発生率になってい

る。回路形式(B)についてもほぼ同じ傾向である。

表2に示したその他のフィルタ、すなわち9次LPF(W)、11次LPF(N)、(W)、および9次HPF(N)、(W)、11次HPF(W)についても総容量に対する組合せ/並べ順の分布を調べたが、同様な結果が得られた。

以上の結果から、本論文で提案した零点、極の組合せ/並べ順に対する条件が広範囲の周波数選択性フィルタに対して有効であることがわかる。

#### (4) 最適な組合せ/並べ順の探索

最小の総容量( $C_{Tmin}$ )から5%以内の総容量を与える組合せ/並べ順を見出す場合を考えてみる。制約条件を課さない場合この範囲内の発生率は約2%である。確率論で言えば、50通りの組合せ/並べ順について総容量を評価すれば $C_{Tmin}+5\%$ 以内の解が1個見つかることになる。しかし、実際には100~150通り程度調べる必要がある。

これに対して制約条件を課すことにより $C_{Tmin}+5\%$ 以内の発生率は40%以上あるから、この制約下で無作為に5通り程度について総容量を評価すれば

表5 9次LPF(N)の $C_{7min}$ を与える組合せ/並べ順における $C_{T1}$ ,  $C_{T2}$ と $C_T$ の関係

| No. | P/O   | (A) $C_{12}=C_{14}=0$ |          |       | (B) $C_{21}=C_{14}=0$ |          |       |       |
|-----|-------|-----------------------|----------|-------|-----------------------|----------|-------|-------|
|     |       | $C_{T1}$              | $C_{T1}$ | $C_T$ | $C_{T1}$              | $C_{T2}$ | $C_T$ |       |
| 1   | N5/D2 | 5.2                   | 6.6      | 11.8  | N5/D3                 | 6.5      | 4.9   | 11.4  |
| 2   | N4/D3 | 3.2                   | 9.3      | 12.5  | N1/D1                 | -        | -     | 9.4   |
| 3   | N2/D5 | 3.3                   | 75.9     | 79.2  | N4/D2                 | 6.0      | 6.6   | 12.6  |
| 4   | N3/D4 | 6.5                   | 24.4     | 30.9  | N2/D5                 | 54.8     | 6.0   | 60.8  |
| 5   | N1/D1 | -                     | -        | 7.8   | N3/D4                 | 19.9     | 4.4   | 24.3  |
|     | Total |                       |          | 142.2 | Total                 |          |       | 118.5 |

表6 回路形式(A), (B)と $C_{7min}$ の関係

|     |        | (A) $C_{12}=C_{14}=0$ |            | (B) $C_{21}=C_{14}=0$ |            |
|-----|--------|-----------------------|------------|-----------------------|------------|
|     |        | $f_c$                 | $C_{7min}$ | $f_c$                 | $C_{7min}$ |
| 9次  | LPF(N) | 0.108                 | 142.2      | 0.108                 | 118.5      |
|     | HPF(W) | 0.119                 | 168.4      | 0.119                 | 103.8      |
|     | LPF(W) | 0.304                 | 141.6      | 0.304                 | 265.3      |
|     | HPF(N) | 0.320                 | 160.5      | 0.320                 | 268.2      |
| 11次 | LPF(N) | 0.108                 | 208.2      | 0.108                 | 173.0      |
|     | HPF(W) | 0.119                 | 258.6      | 0.119                 | 146.8      |
|     | LPF(W) | 0.304                 | 208.5      | 0.304                 | 385.8      |
|     | HPF(N) | 0.320                 | 243.7      | 0.320                 | 405.4      |

 $f_c$ : カットオフ周波数( $\times f_s$ )

$C_{7min}+5\%$ 以内の解が得られる。このように、最適な組合せ/並べ順を見出すための探索回数は大幅に低減できる。

#### (5) $C_T$ における $C_{T1}$ と $C_{T2}$ の割合

3.において総容量に占める割合として $Q$ の高い2次回路が支配的であり、また、2次回路の中では(A)の場合は $C_{T2}$ 、(B)の場合は $C_{T1}$ が支配的であることを示した。ここでは、9次LPF(N)の例を用いてこれらの関係を調べてみる。表5に各2次回路の容量を示す。例えば、(A)の場合、 $Q$ の最も高いN2/D5の容量が全体の約56%を占め、その中でも $C_{T2}$ が約96%を占めており、3.の議論と一致する結果が得られている。

#### (6) 回路形式(A), (B)における $C_{7min}$ の比較

二つの回路形式(A), (B)と $C_{7min}$ の関係を表6に示す。5.で議論したように、(A)の回路形式ではフィルタの帯域幅による $C_{7min}$ の変化は小さいことがわかる。一方、(B)の回路形式では $f_c$ が低いほど、すなわち $Q$ の高い極の $\theta_p$ が小さいほど、 $C_{7min}$ も小さく、 $\theta_p$ が大きくなるに従い $C_{7min}$ も大きくなっている。また、 $C_{7min}$ の大きさを比較すると $f_c$ が高い場合は(A)が、 $f_c$ が低い場合は(B)が有効であることがわかる。

## 7. む す び

SCフィルタの縦続構成において総容量を最小化するために零点、極の組合せ/並べ順の満たすべき条件を求めた。この条件は次のように要約できる。①「 $Q$ の高い極の前段までに、この極に近い零点を配置する」。②「 $Q$ の高い極の前段には $Q$ の低い極を配置する」。具体例として9次、11次のLPF, HPFを用いてシミュレーションを行った結果、上記の制約条件を満たす組合せ/並べ順による総容量はその最小値から5~10%以内に大半集中しており、この条件の有効性が確認できた。このことは、この制約条件を課すことにより、極めて少ない探索回数で最適な組合せ/並べ順を見出すことができることを示している。

今後の課題としては、オペアンプや抵抗から発生する雑音によるフィルタの出力雑音と総容量を同時に最小化できる組合せ/並べ順に対する条件を求めることである。

謝辞 日ごろ御指導頂く松浦弘毅教授、武部幹教授、ならびに御討論頂いた当研究室の学生諸氏に深謝致します。

## 文 献

- (1) K. Nakayama and Y. Kuraishi: "Present and future applications of switched-capacitor circuits", IEEE Circuits and Devices Mag., pp. 10-21(1987).
- (2) 中山謙二: "SC回路網の設計と応用", 東海大学出版会(昭和60).
- (3) X. X. Cai, et al.: "Pole-zero pairing strategy for area and sensitivity reduction in cascade SC filters", Proc. IEEE ISCAS '86, pp. 609-611(1986).
- (4) 中山謙二, 馬 志強: "SCフィルタの縦続構成における総容量の最小化手法", 信学会回路とシステム軽井沢ワークショップ論文集, pp. 219-226(平1).
- (5) K. Nakayama and Z. Q. Ma: "A method to minimize total capacitance in cascade realization of SC filters", 32nd Midwest Symposium on Circuits and Systems (1989).
- (6) L. B. Jackson: "On the interaction of roundoff noise and dynamic range in digital filters", Bell Syst. Tech. J., 49, pp. 159-184(1970).
- (7) K. Martin and A. S. Sedra: "Stray-insensitive switched-capacitor filters based on the bilinear z-transform", Electron Lett., 19, 6, pp. 365-366(1979).
- (8) P. E. Fleisher and K. R. Laker: "A family of active switched capacitor biquad building blocks", Bell Syst. Tech. J., 58, 12, pp. 2235-2268(1979).

(平成元年10月16日受付)



馬 志強

1975 中国中南鉱冶学院・自動制御卒。  
1982 同大学院修士課程了。同年同学院講師。  
現在、金沢大・大学院自然科学研究科  
(博士課程) 在学中。SC フィルタの最適設計、  
能動 RC 回路合成などの研究に従事。



中山 謙二

昭 46 東工大・工・電子卒。昭 46~47 同  
大学研究生。昭 58 同大学より工学博士の学位  
取得。昭 47 日本電気(株)入社。伝送通信  
事業部および C&C システム研究所にて通  
信用各種フィルタ、ディジタル信号処理、  
信号理論、ニューラルネットに関する研究  
開発に従事。63 年 8 月金沢大学工学部電気・情報工学科に移り、  
現在、助教授。62 年 9 月 IEEE Circuits & Devices Mag. 論文  
賞受賞。著書「SC 回路網の設計と応用」(東海大学出版会)  
ほか。IEEE シニア会員。



山本 外史

昭 25 名大・工・電気卒。昭 32 金沢大・  
工・電気科講師。昭 35 同大助教授。昭 39 同  
大電子工学科教授。昭 60 同大電気・情報工  
学科教授。現在に至る。電子回路、シミュ  
レーションの研究に従事。工博。ME 学会会  
員。